「資金配分問題」と数理計画法 - 不可分性の下での最適化 -

AUTHOR(S):
浅沼, 萬里

CITATION:
浅沼, 萬里. 「資金配分問題」と数理計画法 - 不可分性の下での最適化 - . 經濟論叢 1965, 96(6): 415-438

ISSUE DATE:
1965-12

URL:
https://doi.org/10.14989/133094

經濟論叢

第九十六巻　第六號

シェーカーズの衰亡……………………………穂　積　文　雄　1

ベルヌーイの効用指標……………………………鎌　倉　　　昇　20

「資金配分問題」と数理計画法…………………浅　沼　萬　里　39

書　　評

イギリス革命論における反対者たち…………堀　江　英　一　63

経済論叢　第九十五巻・第九十六巻総目録

昭和四十年十二月

京都大學經濟學會

「資金配分問題」と数理計画法

——不可分性の下での最適化——

浅沼萬里

まえがき

本稿は，投資決定の部面において生じる，ある型の最適化問題をとりあげ，数理計画法適用の意義を考察する。この問題の核心は，アクティビティの水準に課される整数条件，したがって，投入産出にかんする不可分性 (indivisibility) の下で，最適化をはからなければならないところにある。正確な解に到達することは，意外にやっかいであって，整数計画法 (integer programming) の開発により，はじめて一般的な解法が確保された。

第I節で，困難の所在を示し，それが解決されてゆく道すじをたどって，伝統的な解法——線型計画法 (linear programming)——整数計画法，の発展関係をあとづける。

第II節では，観点をかえ，数理計画法の提供する双対価格 (dual price) の概念を媒介にして，不可分性の制約の存在する場合の，価格機構ないし分権的決定機構の有効性を考察する[1]。

I 「資金配分問題」とその解決

A. 「資金配分問題」

ある経済セクターについて，次のような場面を考える。技術的に実行可能な複数個の投資プロジェクト $P_j(j=1, \cdots, n)$ が立案ずみである。投資の総枠は，これと独立に与えられる。この予算の枠内でどのようにプロジェクトをえらべば，経済的に最良の投資計画を構成できるか。

1) 本稿は Weingartner の先行業績〔15〕から多くの素材をうけた。

かんたん化のため，「経済的に最良」ということの意味を限定しよう。プロジェクト個々の収益性を，正味現在価値[2]ではかることにし，その値b_jは，各P_jにつき既知とする。そして，採用されたプロジェクトの現在価値の和が最大になることが，「最適」だと約束しておく。

資金面に制約がなければ，単純に，現在価値が正のものすべてを採用することで，この意味の最適を達成できるのだが，いま，P_jの実施には，T期にわたる資本費支出 $c_{tj}(t=1, \cdots, T)$ が必要で，他方，毎期の総投資が予算 C_t でおさえられるならば，一般に，b_jが正のプロジェクトをすべて採用することはできなくなり，さらに選別をおこなうための方法が必要になるのである。

前稿で[3]，この問題を，定額資本予算の最適配分問題と名づけ——以下かんたんに「資金配分問題」とよぼう——，伝統的ないし試行錯誤法的な解法を考察しておいた。その解法をふりかえってみるところから，はじめよう。

B．伝統的解法[4]

〔1〕 順位づけ法

1期しか考えないでよい単純なケース ($T=1$) では，投下資金1単位当り現在価値：$\frac{b_j}{c_j}$ の大いさによって，プロジェクトを順位づけることができる。この順位の上のものから，予算Cがつきるまで採用してゆくというのが，常識的な解決である。

だが，ここで早くも，問題点が姿をあらわす。この方法は，はたして最適解を保証するだろうか。プロジェクトが任意に細分できるものならば，しかり，といえるはずである。しかし，「資金配分問題」においては，P_jのおのおのが，固有の，不可分 (indivisible) の大いさをもつと想定する。そして予算は採否決定にさきだつ与件である。だから，上位からとっていったプロジェクトの集合が，ちょうど予算を使いきることになるとはかぎらず，むしろ順位にこだわら

2) the net present value. 浅沼，〔1〕参照。
3) *Ibid.* なお，本稿では記号をすこし変えた。
4) 〔1〕は「従来からあった」手法であり，〔2〕は，そうではないが，「数理計画法によらない」手法である点が〔1〕と共通している。便宜上，「伝統的」ということばを，適当に使う。

ずに予算いっぱいを使うような組合せをえらんだ方が，総現在価値が大きくなる場合がおこりうる[5]。

すなわち，順位づけによる方法は，不可分性の条件をみたす，ある可能解を示しうるが，かならずしも最適解に到達しえない。

〔2〕 Lorie and Savage 法

予算制約が2期以上にわたるやいなや（$T \geq 2$），いま見たような順位づけもできなくなり，常識的に解決することがむずかしくなる。

前稿で，Lorie and Savage が，次のような巧妙な方法をくふうしたことを見た。

「各期の資金に乗じる1組のパラメタ p_1，…，p_T を導入し，量 $b_j - \sum_{t=1}^{T} p_t c_{tj}$ の正負を，プロジェクト P_j の採否の基準とする。p_1，…，p_T の任意の正値から出発し，C_t が使いすぎなら p_t の値を増し，あまりすぎれば，減らせ。こうして，採用されたプロジェクト群が，予算をこえず，しかも資金をできるだけあまさないものとなるよう，p_1，…，p_T の適当な値を，試行錯誤的に決めよ。[6]」

この方法を，Lorie and Savage 法〔以下 LS 法と略記〕とよぼう。

LS 法は，加重平均の考えを使って，前記の順位づけ法を多期間の場合に一般化したものだが[7]，次の点に不満がのこる。

1)　数値計算が非系統的で，2期の場合はグラフを使えるにしても，3期以上のばあい，実にめんどうだ。

2)　順位づけ法の一般化であるかぎり，同じように，最適解を保証しえないはずで[8]，これはヨリ根本的な難点である。

こうして，伝統的な方法は，壁にゆきあたる。他方，われわれの問題が，条件つき最大化問題の形をそなえていることは，数学的最大化手法適用の有望性を示唆する。1950年代に実用化した線型計画法〔以下 LP と略記〕は，どのよう

5)　例題1を見よ。
6)　Lorie and Savage,〔10〕, pp. 231–5.
7)　*Ibid.*, pp. 233–4.
8)　考案者たち自身，このことに気づいていた。*Op. cit.*, p. 232.

な前進をもたらすだろうか。

C．LP の適用

〔1〕 モデル

「資金配分問題」が，次のようなLP問題として定式化できることは，容易にわかる。

$$
\left\lceil
\begin{array}{lll}
\sum_{j=1}^{n} c_{tj}x_j \leq C_t, & t=1,\ \cdots,\ T & \text{(a)} \\
0 \leq x_j \leq 1, & j=1,\ \cdots,\ n & \text{(b)}
\end{array}
\right.
$$

の下で， (I・1)

$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j$ を最大化せよ。」[9]

ここに変数 x_j は，第 j プロジェクト P_j の採用水準を表わす。

数値計算のためには，非負のスラック変数 λ_t および $\bar{x}_j$ を導入して，（a）と（b）を等式に変換しておく必要がある。

$$
\begin{array}{lll}
\sum_{j=1}^{n} c_{tj}x_j + \lambda_t = C_t, & t=1,\ \cdots,\ T & \text{(a}'\text{)} \\
x_j + \bar{x}_j = 1, & j=1,\ \cdots,\ n & \text{(b}'\text{)}
\end{array}
$$

λ_t は，第 t 期に生じる余剰資金量と解釈できる[10]。$\bar{x}_j$ は，プロジェクトの採用水準の，上限1からの差を示す。

〔2〕 数値計算

ひとたび問題が (I・1) の形に定式化され，b_j，c_{tj} および C_t の値がデータとして与えられれば，シンプレックス法のような既存の数値計算法が，有限回の逐次改良的な計算で，最適採用水準 $x_j^*(j=1,\ \cdots,\ n)$と，目的函数（総現在価値）の最大値 $\sum b_j x_j^*$とを与える[11]。これが，制約（a）（b）をみたす解のうち最良のものであることは，数学的に保証される。こうして LP は，LS 法の第一の難点を突破する。

9) Weingartner, *op. cit.*, p. 17.

10) c_{tj}, C_t は，すべて現在価値で大いさが与えられるものとしておく。したがって，λ_t も，現在価値を示すことになる。

11) 以下，本稿を通じ，変数の最適値には右肩に＊をつける。

〔3〕 分数解の発生

だが，LP 解が，「資金配分問題」の要求を完全にみたすものではないことも，すぐわかる。前提により分割不可能な，各プロジェクトの，採用水準に許される値は，正確には，1〔採用〕または0〔不採用〕のどちらかしかないが，LP は，x_j が0と1との間の分数値をとることを排除できない。「不可分性の下での最適化」問題は，実は，解けていないわけである。

ただし，実際的な見地からすれば，LP 解を近似解として活用しうる[12]。しかも，モデル(II・1)においては，任意の基本解の中の，分数解の個数は，たかだか T 個であることが証明されている[13]。したがって，LP は，一般にかなりよい近似解を与えることができ，とくにプロジェクトの個数 n が期の数 T にくらべて相当多いとき，近似がよくなる。

〔4〕 非独立的な関係の処理

LP の1つのメリットは，本質的に個々のプロジェクトを切りはなして順位づける伝統的解法では，処理能力の外にあった，プロジェクト間の非独立性を[13]，制約式の追加によって，機械的に処理できることである。たとえば，排反関係のある場合，排反的なプロジェクトの添字の集合を J とすれば，$\sum_{j \in J} x_j \leq 1$ という制約式を追加すればよい。

他面，こういったばあい，LP 解が分数解を排除できないことは，いよいよ明白に欠陥となる。排反的な火力発電所案と水力発電所案について，「火力$\frac{1}{3}$個と水力$\frac{2}{3}$個」という答が出ても，選択の手引になりにくいからである。

整数計画法〔以下 IP と略記〕の必要性は，プロジェクト間の非独立性を考慮に含めるばあい，いっそう大きくなる。

D．IP の適用

〔1〕 モデル

12) Massé, 〔11〕, pp. 163-4.
13) Weingartner, *op. cit.*, pp. 35-8. 基本解に入りうる変数は x_j だけでなく，λ_t もあるから，分数プロジェクトの個数は，さらに少なくなる。
14) 排反関係や補完関係。Bierman and Smidt, 〔2〕, pp. 66-8.

「資金配分問題」を正確に表現するモデルを定式化すること自体は，むずかしくない。

$$
\text{「}\left\{
\begin{array}{lll}
\sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_j \leq C_t, \quad t=1, \cdots, T & (\mathrm{a}) & \\
0 \leq x_j \leq 1, \quad j=1, \cdots, n & (\mathrm{b}) & (\mathrm{I}\cdot 2) \\
x_j: \quad \text{整数} & (\mathrm{c}) &
\end{array}
\right.
$$

の下で，

$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j$ を最大化せよ。」[15]

これは一つの IP 問題にほかならない。

〔2〕 数値計算

しかしながら，IP 問題を実際に解きうる手法が考案されたのは，近年のことである[16]。いくつかの手法のうち，双対価格との関連性が研究されているものは，Gomory の考案した Method of Integer Forms〔以下 MIF 法と略記〕であるから，これを適用する。

〔3〕 MIF 法

IP の計算法は LP の場合ほど常識化していないし，IP 双対価格の考察のさいには，この計算法の知識が前提となるから，ここでかんたんに MIF 法を見ておく[17]。

a） 計算手順

MIF 法とは，次のような手順によって，IP 問題の数値解を求める方法である。

① 与えられた IP 問題から整数条件を除けば，ふつうの LP 問題になる。これをシンプレックス法で解く。

15) Weingartner, *op. cit.*, p. 46.

16) 1958―60年に，Gomory や Land and Doig の仕事が現われた。いまも開発が進行中である。

17) 主として Gomory and Baumol,〔7〕による。なお，根岸・浜田，〔13〕，Ⅳ章；および Dantzig,〔4〕，§ 26-2 参照。

② この解が整数解でなければ，のちにのべるルールによって，いま解いたLP 問題のデータから新しい制約式を作り，この LP 問題に附加する。

③ こうしてできた新しい LP 問題を解く。

④ この解が整数解でなければ，②③を反復する。

b） 追加制約式

②で導入される新しい制約式の作り方は次のとおりである。

シンプレックス法で LP（最大化）問題を解くとき，計算表（タブロー）の任意の段階は，次のような連立方程式を表現している[18]。

$$\begin{cases} z = a'_{00} + \sum_{j=1}^{n} a'_{0j}(-t_j) \\ t'_i = a'_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(-t_j) \quad (i=1,\ \cdots,\ m) \end{cases} \tag{I·3}$$

ここに，

z ：目的函数，

t'_i：ある段階の基本変数，

t_j ：その段階の非基本変数，

a'_{ij}：その段階の係数。

シンプレックス法は，一定の規則により，1回に1個づつ基本変数を入れかえてゆき，解のある場合，有限回で，すべての $a'_{0j}(j=1,\ \cdots,\ n)$ と $a'_{i0}(i=1,\ \cdots,\ m)$ が非負であるような状態に到達させるものである。この状態で，t_j をすべて0とおけば，LP 最適解が次のように得られるわけである。

$$z^* = a'_{00}\ ;\ \begin{cases} t'_i{}^* = a'_{i0} & (i=1,\ \cdots,\ m) \\ t_j{}^* = 0 & (j=1,\ \cdots,\ n) \end{cases}$$

さて，この解が整数解でなければ，すなわち，$a'_{i0}(i=1,\ \cdots,\ m)$ の中に整数でないものがあるときには，新しい制約式を，次のようにして作る。

(I·3)の，$m+1$ 個の等式のうち，任意の1個をとり，その係数 $a'_{ij}(j=0,\ \cdots,$

18） 正確には，いわゆる簡約シンプレックス表の場合。Gomory and Baumol, *op. cit.*, pp. 540–2. なお Vajda,〔14〕, pp. 70–1 参照。

n)を，次のように分解する。

$$a'_{ij}=k_{ij}+f_{ij},\ \ 1>f_{ij}\geq 0$$

ここに k_{ij} は，a'_{ij} を超えない最大の整数。

いま，この f_{ij} を係数とする，変数の t_j 1次結合について，$t_j(j=1,\ \cdots,\ n)$ および t'_i が整数値をとるとき，不等関係，

$$\sum f_{ij}t_j\geq f_{i0} \tag{I・4}$$

が成り立つことが証明できる[19]。 非負のスラック変数s_1を導入して，(I・4) を等式化すれば，

$$s_1=-f_{i0}+\sum_{j=1}^{n}(-f_{ij})(-t_j) \tag{I・5}$$

これが，求める新制約式である。

c) MIF 法の意味

この追加制約式は，次のような性質をもっている。

1) はじめの LP 最適解が,整数解でなければ,それは (I・4) をみたさない。そこで制約式 (I・5) を追加すると，従来の可能領域は縮小されることになる。

2) (I・5) のグラフは，少なくとも1個の整数格子点[19]を通る。ただし，その点がもとの可能領域内のものとはかぎらない。

3) (I・5) は，もとの可能領域内にあった，どの整数格子点も排除せず，新しい可能領域内に残す。

MIF 法のねらいは，制約式を次々と附加してゆくことにより，もとの LP 問題の可能領域を切り縮めてゆき，もとの可能領域に含まれていた整数格子点の中で，目的函数をもっとも大きくするものに到達しようというものである。この意味で，(I・5)のグラフは，截断平面 (cutting plane) とよばれる。

d) 要 約

要点は，MIF 法が，IP 問題を LP に還元して解くということである。こ

19) 根岸・浜田，前掲，138-40ページ；Dantzig，〔4〕，§ 26-2，pp. 521-5.
20) 座標がすべて整数である点。

のことから，次の2つの利点が生まれる。

1）既存の，LP の数値計算法が使える。

2）IP 最適解を得たとき，双対問題の解にかんする情報も，同時に得られている。

C．数値例

3つの例題を使って，LS 法，LP および IP という3種の解法の適用結果を見ることにしよう。別表をごらんいただきたい。

〔1〕例題　1

前稿で登場した1期問題――そのかんたんな構造にもかかわらず，「不可分性」のために，順位づけ法や LS 法では，直観的にはすぐわかる最適解に達しえない例[21)]――である。

LS 法は，いまいったとおり，あきらかに劣等な解しか示せない。

LP は，x_2 に分数値を許すことによって，資金を使いきり，総現在価値 14・8 百万円に達している。

IP により，総現在価値は LP の場合より減るが，現実的意味をもつ整数解が保証された。これが考えうる最良の解であることは，この場合，常識的にあきらかである。

〔2〕例題　2

これも前稿で登場し，LS 法考察の素材となった[22)]。LP は両期の資金を使いきり，もっとも高い総現在価値に達するが，x_6 と x_7 に分数値が許されることによって，それが可能になっている。

さて，この場合，IP と LS 法は全く同一の結果を示す。計算はめんどうだとしても，LS 法は，結局は最適整数解に達しうる力をもっているように思える。しかし，次の反証が，これをくつがえす。

〔3〕例題　3

21) Lorie and Savage, *op. cit.*, p. 232.
22) *Ibid.*, p. 234.

例題2に，プロジェクトを1個(P_{10})追加しただけのものである[23)]。IP は，例題2の場合と同一の最適解に達する。しかし今度は，LS 法の手続でこの解に達することは，どうしてもできない。LS 法は，ヨリ劣等な解をしか示すことができないのである。

Ⅱ 「資金配分問題」と価格機構

A．LS 法再考

IP の到達する最適解に，LS 法が，かならずしも到達できないという事実は，たんに1つの手法の限界を示すということ以上の，意味をはらんでいる。

LS 法で，解をみちびくのに使われた助変数p_tは，第t期の資金1単位のウェイトであったが，これを価格と読みかえてみよう。プロジェクトの採否判定指標 $b_j-\sum_{t=1}^{T}p_t c_{tj}$ は，収益と，この価格で評価した投入（ここでは資金）の費用との差額，すなわちいわゆる「利潤」(profit) の意味をもつことになる。そして，LS 法の手続全体は，「利潤」の正負を唯一の行動基準とする個別主体が，資金供給（ここでは一定）に対する需要の過不足に応じて上下する価格をパロメーターとして，分権的に投資決定をおこなう機構を表現するものと読みかえることができる。

ところで，LP の前提するような，アクティビティの可分性 (divisibility) と加法性 (additivity) の仮定のみたされる特殊な世界については，LP を解いて（いわば集権的に）得られる最適計画と，価格機構による分権的行動とが，結果として，同等になることが知られている[24)]。

これに対し，IP 解にくらべて LS 法の解が劣ることは，アクティビティの不可分性の存在する世界では，価格機構が，かならずしも数理計画法による中央計画と同等の結果に到達できないことを，例示するものである。このこと自体は，理論的に意外なものではないのだが，第Ⅰ節で解いた問題の双対を考え

23) Weingartner, *op. cit.*, p. 47.
24) Dosso, [5], Chap. 13, 14.

ることによって，もうすこしたちいって，事態を眺めることができる。

B．LP 双対問題の考察

〔1〕 LP 双対問題と資源評価

まず，一般的資源配分問題を対象に，双対性をめぐる既存の命題を整理しておこう。

a） 数学的関係

モデル(I・1)から，上限制約 $x_j \leq 1$ を除いた，次のような最大化問題を考える。

$$「\sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_j \leq C_t,\quad t=1,\ \cdots,\ T \qquad x_j \geq 0 \qquad \text{(II・1)}$$

の下で，

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \quad \text{を最大化せよ。」}$$

(II・1) に対応して，同じデータを用いて定義される，双対問題 (II・2) が，数学的に，存在する。

$$「\sum_{t=1}^{T} \rho_t c_{tj} \geq b_j,\quad j=1,\ \cdots,\ n \qquad \rho_t \geq 0 \qquad \text{(II・2)}$$

の下で，

$$\sum_{t=1}^{T} \rho_t C_t \quad \text{を最小化せよ。」}$$

(II・1) と (II・2) との間には，次の関係がある。

① 一方に最適解があれば，他方にもあり，かつ，$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j^* = \sum_{t=1}^{T} \rho_t^* C_t$

② 双方の可能解は，次の関係をみたすとき，かつ，そのときにのみ，最適解。

(i) $\sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_j < C_t \longrightarrow \rho_t = 0$

(ii) $\rho_t > 0 \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_j = C_t$

また,

$$\text{(iii)}\quad \sum_{t=1}^{T}\rho_t c_{tj} > b_j \longrightarrow x_j = 0$$

$$\text{(iv)}\quad x_j > 0 \longrightarrow \sum_{t=1}^{T}\rho_t c_{tj} = b_j$$

そして，一方の問題をシンプレックス法で解けば，他方の問題の最適解も同時に与えられる。

b） 経済学的意味づけ

さて，(II・1) に，1つの資源配分問題を担わせるとき，すなわち，C_t を第 t 資源の利用可能量，c_{tj} を投入係数，x_j を第 j アクティビティの稼動水準，b_j を稼動1単位当り収益〔産出価値〕として，総収益最大化をはかるとき，双対問題 (II・2) には，資源評価問題という意味を与えるのが，定説となっている[25]。双対変数 ρ_t を，t 第資源1単位を評価する，一種の計算価格と解釈し，(II・2) を，次のように読むわけである。

「どのプロセスについても，

費用≧収益

の関係を保ちながら，利用可能な資源の総評価価値を最小にするような，非負の資源価格を決定せよ。」

いまや，前記の関係①②は，次のような意味を担うことになる。

① 資源の最適配分が実現できれば，対応的に，資源価格が決定でき，かつ，この価格で評価した資源総価値は，総産出価値の最大値にひとしい。

② 最適の必要十分条件は，次のとおり。

(i) 余剰の生じる資源は，価格ゼロと評価。

(ii) 価格正の資源は使いきられる。

(iii) 費用＞収益 となるアクティビティは，稼動されない。

(iv) 稼動されているアクティビティにおいては，費用＝収益。

c） 双対価格

25) *Ibid.*, Chap. 7; Gale, 〔6〕, pp. 12-21. ソ連文献でも事情は同じ。Kantorovich, 〔8〕を見よ。

LP 問題(II・2)の最適解として得られる計算価格 ρ_t^* は，潜在価格(shadow price) または双対価格 (dual price) とよばれる[26]。

上記の諸関係から，この価格が，次のような性質のものであることがわかる。

(1) いま，各アクティビティを，1つの独立部門だと考える。各アクティビティの産出1単位当り収益（製品価格）b_j を与件とし，各部門は，自部門の利潤 $b_j-\sum\rho_t c_{tj}$ の最大化をめざして，おのおの独立に行動するものとする。経済全体の資源（T種）の利用可能量 $C_t(t=1,\ \cdots,\ T)$ は一定。その価格 $\rho_t(t=1,\ \cdots,\ T)$ は，競争によって決る。この競争のはてに定まる競争均衡価格と，双対価格とは，同じ値である[27]。

(2) LP 問題(II・2) を解くか，部門間競争の均衡点への収束をまつかして，最適価格 ρ_t^* が得られれば[28]，この価格によって，各部門に分権的決定をおこなわせるとき，(II・1) を直接解くのと同じく，経済全体にとっての総産出価値の最大化が達成される。

こうして，双対価格 ρ_t^* には，分権的決定のパラメタとしての機能が，期待される。

〔2〕「資金配分問題」と LP 双対

標準的なケースから，「資金配分問題」にかえろう。

a）モデル

(I・1) の双対問題は，次の形になる。

$$\begin{cases}\sum_{t=1}^{T}\rho_t c_{tj}+\mu_j\geq b_j,\ \ j=1,\ \cdots,\ n\\ \rho_t,\ \ \mu_j\geq 0\end{cases}\qquad\text{(II・3)}$$

---

26) Kantorovich は，これを数学的には解決乗数 (resolving multiplier) とよび，経済学的には「客観的必然的評価」(objectively conditioned rating) とよぶ。Kantorovich, *op. cit.*

27) ただし，競争の場合，どのような過程とテンポでこの価格に到達するかということは別問題。Dosso, *op. cit.*, § 14-6, p. 408.

28) 真の市場競争をまつのではなく，競争機構を模型化して，能率よく，分権化用の価格を計算するための原理が，いくつかの方向で探究されている。根岸・浜田，前掲，81-4 ページ；古瀬，〔9〕，第4章，にスケッチ。

の下で，

$$\sum_{t=1}^{T}\rho_t C_t+\sum_{j=1}^{n}\mu_j \quad \text{を最小化せよ}^{29)}\text{。」}$$

(I・1) は，むろん，一種の資源配分問題だから，(II・3) も，評価問題の意味をもつはずだ。(I・1) のデータは現在価値タームで与えられているから，双対変数 ρ_t および μ_j も，現在価値タームで，資源1単位を評価する。ρ_t は，第 t 期の資金コスト。あらたに登場した μ_j は，(I・1)の，x_j の上限1を評価する因子である。

b） 双対価格

LP モデル(II・3)の最適解において得られる ρ_t^* および μ_j^* の機能と意味について考えよう。

ρ_t^* は，ふつうの shadow price であって，第 t 期の資金の限界収入生産力を，現在価値タームで示す点だけがちがっている。

次に μ_j^* だが，まず一連の推論で，その役割を確認する[30]。

最適に達した段階で (II・3) の制約式をとり出すと，

$$\sum_{t=1}^{T}\rho_t^* c_{tj}+\mu_j^*\geq b_j$$

移項して，

$$\mu_j^*\geq b_j-\sum_{t=1}^{T}\rho_t^* c_{tj} \qquad \text{(i)}$$

さて，周知の双対関係から，

$$x_j^*>0\longrightarrow\mu_j^*=b_j-\sum\rho_t^* c_{tj} \qquad \text{(ii)}$$

$$\mu_j^*>b_j-\sum\rho_t^* c_{tj}\longrightarrow x_j^*=0 \qquad \text{(iii)}$$

$$\mu_j^*>0\longrightarrow x_j^*=1 \qquad \text{(iv)}$$

$$x_j^*<1\longrightarrow\mu_j^*=0 \qquad \text{(v)}$$

他方，原問題 (I・1) の，x_j に対するシンプレックス基準[31] を γ_j^* で表わせば，

---

29) Weingartner, *op. cit.*, p. 24.

30) *Ibid.*, pp. 24-7 の議論を整理しなおす。

31) これは，じつは $-x_j\leq 0$ のスラック，つまり x_j 自身に対応する，1つの双対価格。

定義により，

$$\gamma_j^*=\sum_{t=1}^{T}\rho_t^* c_{tj}+\mu_j^*-b_j \tag{vi}$$

$$x_j^*>0\longrightarrow\gamma_j^*=0 \tag{vii}$$

$$\gamma_j^*>0\longrightarrow x_j^*=0 \tag{viii}$$

(v)(vi)(vii) を合わせると，

$$0<x_j^*<1\longrightarrow\gamma_j^*=\sum\rho_t^* c_{tj}-b_j=0 \tag{ix}$$

また，(v)(vi)(viii) から，

$$\gamma_j^*>0\longrightarrow x_j^*=0\longrightarrow\sum_{t=1}^{T}\rho_t^* c_{tj}-b_j>0 \tag{x}$$

以上の結果をまとめると次のようになる。

採用水準		採　用　($x_j^*>0$)		不採用　($x_j^*=0$)	
		$x_j^*=1$	$1>x_j^*>0$	退化の場合	非退化の場合
順　位 / 指　標		全面採用	限界的採用	限界的却下	全面却下
タブローに直接表われるもの	μ_j^*	+	0	0	0
	γ_j^*	0	0	0	+
$b_j-\sum\rho_t^* c_{tj}$		$(=\mu_j^*)$ +	$(=\mu_j^*=-\gamma_j^*)$ 0	$(=\mu_j^*=-\gamma_j^*)$ 0	$(=-\gamma_j^*)$ −

つまり，原問題 (I・1) をシンプレックス法で解くとき，最終表のシンプレックス基準の行は，γ_j^*，ρ_t^*，μ_j^* がならんで得られるわけだが，この γ_j^*（の負値）と μ_j^* とがあいまって，$b_j-\sum\rho_t^* c_{tj}$ の大いさを示し，その正負はプロジェクトの採否と見あっているのである。

c）μ_j^* の経済学的意味

さきにみたように，標準的な資源配分問題の場合，

$$\sum_{t=1}^{T}\rho_t^* c_{tj}\geq b_j,\quad j=1,\ \cdots,\ n$$

がなりたち，双対価格は，利潤の発生を許さなかった。

「資金配分問題」では，いまみたとおり，

$x_j^*=1$ のとき，$\mu_j^*=b_j-\sum_{t=1}^{T}\rho_t^*c_{tj}>0$

であって，「利潤」の発生がみられる。この現象は，x_j^* に課される上限制約にもとづく。立地条件の制約などにより優等プロジェクトの拡張がさまたげられるため，計画にはヨリ劣等なプロジェクトがとりこまれることになるのだが，このとき，限界プロジェクトにくらべ，ヨリ優等なプロジェクトが享受する超過収益 (rent) の，将来にわたる流れを現在価値化したもの，すなわち，のれん (goodwill) が，μ_j^* なのである[32]。

d） 分権的決定

「資金配分問題」の LP モデル (I・1) は，〔1〕で見ておいた標準的な資源配分問題にくらべ，形式的には上限制約が加わり，内容的には現在価値次元になって，変形をこうむっているが，なお，ある種の分権的決定で，ほぼ照応的な結果を実現させることができる。

中央機関が利子率 ρ_t^* を決定して通告すれば，各プロジェクト立案者が，手持のデータ b_j と c_{tj} を使って $b_j-\sum_{t=1}^{T}\rho_t^*c_{tj}$ の値を計算し，正ならば採用，負ならば不採用を自主的に決めるというシステムを考える。中央機関が，ちょうど (II・3) の解であるような ρ_t^* をえらべば，水準1で採用されるプロジェクトと，問題なくおとされるプロジェクトについては，(I・1) を直接解いて実施するのと同じ結果を得る。ただし，$b_j-\sum_{t=1}^{T}\rho_t^t c_t^*=0$ となるプロジェクトについては，現状では，まるまる採用が許されないのだから，中央が介入して手をうたなければならない[33]。

本来，プロジェクトの水準は，整数〔本稿の定式化では1か0〕でなければならないのに，LP モデル(I・1)は，分数解を許しているから，LP 双対価格を使って決定を下すにしても，ボーダーライン・ケースで問題が生じてしまうのである。

32) Weingartner, *op. cit.*, p. 55. また Massé and Bessière,〔12〕, pp. 248-52 参照。
33) Weingartner, *op. cit*, pp.. 55-6.

では，もっと直接に，IP モデル(I・2)に対応して双対価格が得られないだろうか。この価格を手引に分権的決定をおこなわせて，(I・2) の解を直接実施するのと同じ結果に到達できないだろうか。

C．IP 双対価格

〔1〕 IP 双対価格

IP には，LP の場合のように一義的で明確な双対価格が対応しない。しかし MIF 法が IP を LP に還元して解く手続であることを利用して接近がこころみられている。

a） MIF 法から得られる双対価格[34]

MIF 法は，IP を LP に帰着させて解く手続だから，整数最適解が得られたとき，1組の LP 双対価格を与える。この価格は，とうぜん，ふつうの LP 双対価格と共通の性質と役立ちをもっているが，次のような点が特殊である。

① 追加制約式のえらび方に依存していて，一義的でない。

② 本来の問題の希少要素に対するばかりでなく，追加制約式のスラック変数にも価格が対応し，最適段階でその制約が利いていれば，正の価格がつく。この価格は，「不可分性の機会費用」として――たとえば「倉庫にさいごの箱の$\frac{4}{10}$個を詰めこむことを許さないような，人為的な能力(キャパシティ)制限1単位の存在が，企業に負わせる損失」――として，一応意味づけられうる。

③ この解釈は，双対価格イコール投入財の限界収入生産力と見ているわけだが，じつは IP の場合には，投入を任意に細分できないので，投入財 X の限界収入生産力$\frac{\Delta R}{\Delta X}$は，かならずしも，双対価格$\frac{dR}{dX}$にひとしくない。これに関連して，絶対的にあまるわけではなく，単に非整数値で存在するゆえにあまるキャパシティにもゼロ価格がついてしまう。

b） 再計算価格

IP 解の直接的な副産物として得られる双対価格(the computed prices)は，「人為的」キャパシティに正値をつける点で，すっきりしない。

34) Gomory and Baumol, *op. cit.*, pp. 528–32.

Gomory and Baumol は，次のようなくふうで，この点の解決をはかる[35]。追加制約式は，一般に，はじめの制約式の非負1次結合から，定数を引いたものになっている。そこで，このウエイトを使って，追加制約式に連関する価格を，はじめの制約式に配分しもどすということを考える。第 i 追加制約式の構成に，はじめの第 j 制約式がウエイト g_{ij} で入っているとし，「人為的な財 i」の価格が π_i，本来の財 j の価格が π_j だとするとき，次の式により，再計算価格 (the recomputed prices) π' を得るのである。

$$\pi_j'=\pi_j+\sum_i g_{ij}\pi_i \qquad \text{all } g_{ij}\geq 0 \quad \text{〔第 } j \text{ 財の価格を } \pi_j \text{ から } \pi_j' \text{ にかえる〕}$$

$$\pi_i'=0 \qquad \text{〔人為的な財 } i \text{ の価格をゼロとおく〕}$$

この価格体系は，本来的なキャパシティだけに価格を与え，しかも依然として，「任意のプロセスについて利潤非正；稼動されているプロセスについて利潤ゼロ」という，LP 双対価格の重要な性質を保存することが主張される[36]。

しかしながら，この価格体系も，また，いくつかの特殊性をまぬかれることができない。

① 再計算価格の値は，追加制約式のえらび方に依存し，一般に，一義的でない。また MIF 法以外の IP 解法で得られた解には，再計算の手続が適用できない。

② LP 双対における基本関係，「資源の総帰属価値＝産出物総価値」が成りたたない。

③ 「人為的」制約式を構成しているはじめの制約式という場合，資源にかんする制約式だけでなく，非負産出条件 $x_j\geq 0$ も含まれている。そこで，再計算の結果，制約式 $x_j\geq 0$ に正の価格がわりつけられることがありうる。価格体系としての解釈を保つためには，これを，第 j プロセス稼動1単位あたり支給される補助金と意味づけなければならない[37]。

35) *Ibid.*, pp. 532–3.
36) *Ibid.*, pp. 533, 545–7.
37) *Ibid.*, p. 533.

〔2〕「資金配分問題」と再計算価格

第I節で使った例題のおのおのについて，Gomory and Baumol の提唱する再計算価格を求めてみる。

登場する双対価格は3種類，ρ_t^*，γ_j^* および μ_j^* である。

第 t 期の資金の評価 ρ_t^* についても，かならずしも限界収入生産力を示すとはいえず，「自由財⇄価格ゼロ」とはいえない，というような問題点が含まれているが，γ_j^* と μ_j^t の解釈をめぐっては，事態はさらに入りくんでいる。

a）γ_j^* の解釈

x_j に対応するシンプレックス基準であり，$-x_j\leq 0$ に対応する双対価格である γ_j^* の値を観察すると，「$x_j^*=0$ で $\gamma_j^*>0$」になっている場合と，「$x_j^*=1$ で $\gamma_j^*>0$」になる場合とを，ともに発見する。

まえの場合は，シンプレックス基準の意味からいっても，「資金配分問題」のLP モデルのところでみたことからしても，ノーマルな状況といえる。あとの場合には，$(-\gamma_j^*=)b_j-\sum\rho_t^*c_{tj}<0$ となり，直接的には損失が生じるのに，プロジェクトが採用されているのだ。この場合価格体系の斉合性をすくうには，γ_j^* だけの補助金が出ていると解釈しなければならない。

b）μ_j^* の解釈

$x_j\leq 1$ に対応する双対価格 μ_j^* の値を観察すると，「$x_j^*=1$ で $\mu_j^*>0$」と，「$x_j^*=0$ で $\mu_j^*>0$」との2つの場合がともに生じている。

LPモデルについてみたように，μ_j^* は，$\mu_j^*=b_j-\sum\rho_t^*c_{tj}$ つまり「のれん」なのだから，まえの場合に，ふしぎはない。しかし，あとの場合については，ちょうど μ_j^* だけの大いさの罰金[38]または税金が課されて，採用を抑制していると解釈しなければ，価格体系の斉合性が保たれない。

〔3〕分権的決定

整理しよう。IP の場合の双対価格として，MIF 法という特定の IP 解法に依存する，一種の計算価格が案出されている。この価格は一応形式的に，「すべ

38）このような μ_j^* を "penalty" と解釈すべきことについては，Weingartner, *op. cit.*, p. 104.

てのプロセスについて利潤非正；稼動プロセスについて利潤ゼロ」という〔均衡〕条件をみたすが，吟味してみると，本来の資源の価格にかんする情報だけによる分権的過程では，かならずしも有効生産量を達成できないことがわかる。

いま，中央機関が，IP モデル(I・2)を解くのに必要な情報をもっていて，これを解いた上で，事後的に，この解に対応する双対価格を算出したとしても，この解を分権的に達成させるためには，ときには補助金，ときには罰金の発動が必要であって，資源価格の公定・通告だけでは足らないのである。

補助金の必要性は，整数条件の存在によって，罰金の必要性は，上限制約による利潤発生の可能性がつけ加わることによって生じている。

む す び

投資決定の実務の中から生まれてくる，ある型の問題を一般化して，「資金配分問題」を考えることができるが，それは1つの，不可分性の下での最適化問題であり，上限制約つきの整数計画問題にほかならない。第I節で，LS 法，LP，IP の，3つの手法を比較した。LS 法はつねに可能解を示すが，最適解を保証できない。LP は，不可分性の制約を正確には，みたさない。IP が解を与える。

第II節で，このIP 解を，分権的機構で実現させることができるかどうかを考え，一般に，資源価格の情報だけでは，かならずしも実現できないことを見た。LS 法の手続は，資源価格のみを手引とする競争過程によって解を得ようとするこころみだと解釈できるから，これがうまくゆかない理由も裏づけられたわけである。

技術的な問題から出発したが，われわれのたどってきた道は，資源の有効配分機構という問題の平野に通じている。

例題　1.

プロジェクト ＼ データ	P_1	P_2	P_3	
b_j	10	6	6	予算
c_{1j}	6	5	5	$C_1=10$

単位：百万円

〔1〕　順位づけ法および LS 法：$x_1^*=1,\ x_2^*=0,\ x_3^*=0$

；$\lambda_1^*=4,\ \rho_1^*=1.67$　　　$\sum b_jx_j^*=10$

〔2〕　LP：$x_1^*=1$　$\bar{x}_1^*=0$　|　$\mu_1^*=2.8$　$\gamma_1^*=0$

$x_2^*=0.8$　$\bar{x}_2^*=0.2$　|　$\mu_2^*=0$　$\gamma_2^*=0$

$x_3^*=0$　$\bar{x}_3^*=1$　|　$\mu_3^*=0$　$\gamma_3^*=0$

$\lambda_1^*=0$　|　$\rho_1^*=1.2$

$\sum b_jx_j^*=14.8$

〔3〕　IP：　$x_1^*=0$　$\bar{x}_1^*=1$

①　IP 解　$x_2^*=1$　$\bar{x}_2^*=0$

$x_3^*=1$　$\bar{x}_3^*=0$

$\lambda_1^*=0$

$\sum b_jx_j^*=12$

②　IP 双対価格

a）　MIF 法が直接与えるもの

$\mu_1^*=0$　$\gamma_1^*=0$

$\mu_2^*=0$　$\gamma_2^*=0$

$\mu_3^*=0$　$\gamma_3^*=0$

$\rho_1^*=0.5$

b）　再計算価格

$\mu_1^*=2.8$　$\gamma_1^*=0$

$\mu_2^*=0$　$\gamma_2^*=0$

$\mu_3^*=0$　$\gamma_3^*=0$

$\rho_1^*=1.2$

例題　2.

プロジェクト ＼ データ	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	
b_j	14	17	17	15	40	12	14	10	12	予算
c_{1j}	12	54	6	6	30	6	48	36	18	$C_1=50$
c_{2j}	3	7	6	2	35	6	4	3	3	$C_2=20$

〔1〕　LS 法：(Lorie and Savage の計算結果)

$x_1^*=1$　$x_4^*=1$　$x_7^*=0$　$p_1^*=0.33$

$x_2^*=0$　$x_5^*=0$　$x_8^*=0$　$p_2^*=1$

$x_3^*=1$　$x_6^*=1$　$x_9^*=1$　$\sum b_jx_j^*=70$

〔2〕 LP：

$x_1^*=1$	$\bar{x}_1^*=0$	$\lambda_1^*=0$	$\rho_1^*=0.136$	$\gamma_1^*=0$	$\mu_1^*=6.77$
$x_2^*=0$	$\bar{x}_2^*=1$	$\lambda_2^*=0$	$\rho_2^*=1.864$	$\gamma_2^*=3.41$	$\mu_2^*=0$
$x_3^*=1$	$\bar{x}_3^*=0$			$\gamma_3^*=0$	$\mu_3^*=5.0$
$x_4^*=1$	$\bar{x}_4^*=0$			$\gamma_4^*=0$	$\mu_4^*=10.45$
$x_5^*=0$	$\bar{x}_5^*=1$			$\gamma_5^*=29.32$	$\mu_5^*=0$
$x_6^*=0.970$	$\bar{x}_6^*=0.030$			$\gamma_6^*=0$	$\mu_6^*=0$
$x_7^*=0.045$	$\bar{x}_7^*=0.955$			$\gamma_7^*=0$	$\mu_7^*=0$
$x_8^*=0$	$\bar{x}_8^*=1$			$\gamma_8^*=0.5$	$\mu_8^*=0$
$x_9^*=1$	$\bar{x}_9^*=0$			$\gamma_9^*=0$	$\mu_9^*=3.95$

$\sum b_j x_j^*=70.27$

〔3〕 IP：① IP 解

$x_1^*=1$	$x_6^*=1$	$\bar{x}_j^*=1-x_j^*$	$\lambda_1^*=2$
$x_2^*=0$	$x_7^*=0$	$(j=1,\cdots,9)$	$\lambda_2^*=0$
$x_3^*=1$	$x_8^*=0$		
$x_4^*=1$	$x_9^*=1$		
$x_5^*=0$			$\sum b_j x_j^*=70$

② IP 双対価格

a） MIF 法が直接与える価格

$\mu_1^*=6$	$\gamma_1^*=0$	$\rho_1^*=0$
$\mu_2^*=0$	$\gamma_2^*=3$	$\rho_2^*=1$
$\mu_3^*=5$	$\gamma_3^*=0$	$\pi_1^*=0$
$\mu_4^*=10$	$\gamma_4^*=0$	$\pi_2^*=0$
$\mu_5^*=0$	$\gamma_5^*=29$	$\pi_3^*=1$
$\mu_6^*=0$	$\gamma_6^*=0$	
$\mu_7^*=0$	$\gamma_7^*=0$	（π^*は追加制約式に対する「価格」）
$\mu_8^*=0$	$\gamma_8^*=0$	
$\mu_9^*=3$	$\gamma_9^*=0$	

b） 再計算価格

$\mu_1^*=6.77$	$\gamma_1^*=0$	$\rho_1^*=0.136$
$\mu_2^*=0$	$\gamma_2^*=3.41$	$\rho_2^*=1.864$
$\mu_3^*=5.0$	$\gamma_3^*=0$	
$\mu_4^*=10.45$	$\gamma_4^*=0$	
$\mu_5^*=0$	$\gamma_5^*=29.32$	
$\mu_6^*=0$	$\gamma_6^*=0$	
$\mu_7^*=0$	$\gamma_7^*=0$	
$\mu_8^*=0$	$\gamma_8^*=0.5$	
$\mu_9^*=3.95$	$\gamma_9^*=0$	

例題 3.

プロジェクト ＼ データ	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	
b_j	14	17	17	15	40	12	14	10	12	15	予算
c_{1j}	12	54	6	6	30	6	48	36	18	6	$C_1=50$
c_{2j}	3	7	6	2	35	6	4	3	3	7	$C_2=20$

〔1〕 LS 法：(グラフによる)

$x_1^*=1$ $x_3^*=1$ $x_5^*=0$ $x_7^*=0$ $x_9^*=0$ $\gamma_1^*=20$ ρ_1^*, ρ_2^* はユニークでない
$x_2^*=0$ $x_4^*=1$ $x_6^*=0$ $x_8^*=0$ $x_{10}^*=1$ $\lambda_2=2^*$ $\sum b_j x_j^*=61$

〔2〕 LP：

$x_1^*=1$	$\bar{x}_j^*=1-x_j^*$		$\gamma_1^*=0$	$\mu_1^*=6.423$
$x_2^*=0$	$(j=1,\cdots,10)$		$\gamma_2^*=3.846$	$\mu_2^*=0$
$x_3^*=1$			$\gamma_3^*=0$	$\mu_3^*=4.038$
$x_4^*=1$	$\lambda_1^*=0$	$\rho_1^*=0.122$	$\gamma_4^*=0$	$\mu_4^*=10.192$
$x_5^*=0$	$\lambda_2^*=0$	$\rho_2^*=2.038$	$\gamma_5^*=35.0$	$\mu_5^*=0$
$x_6^*=0$			$\gamma_6^*=0.962$	$\mu_6^*=0$
$x_7^*=0.936$	$\sum b_jx_j^*$		$\gamma_7^*=0$	$\mu_7^*=0$
$x_8^*=0$	$=71.205$		$\gamma_8^*=0.5$	$\mu_8^*=0$
$x_9^*=1$			$\gamma_9^*=0$	$\mu_9^*=3.692$
$x_{10}^*=0.821$			$\gamma_{10}^*=0$	$\mu_{10}^*=0$

〔3〕 IP：

① IP 解

$x_1^*=1$	$x_6^*=1$	$\bar{x}_j^*=1-x_j^*$	$\lambda_1^*=2$
$x_2^*=0$	$x_7^*=0$	$(j=1,\cdots,10)$	$\lambda_2^*=0$
$x_3^*=1$	$x_8^*=0$		
$x_4^*=1$	$x_9^*=1$		$\sum b_jx_j^*=70$
$x_5^*=0$	$x_{10}^*=0$		

② IP 双対価格

a） MIF 法が直接与える価格

$\mu_1^*=6$	$\gamma_1^*=0$	$\rho_1^*=0$
$\mu_2^*=0$	$\gamma_2^*=3$	$\rho_2^*=1$
$\mu_3^*=3$	$\gamma_3^*=0$	
$\mu_4^*=9$	$\gamma_4^*=0$	$\pi_1^*=0$
$\mu_5^*=0$	$\gamma_5^*=35$	$\pi_2^*=0$
$\mu_6^*=0$	$\gamma_6^*=0$	$\pi_3^*=0$
$\mu_7^*=0$	$\gamma_7^*=0$	$\pi_4^*=1$
$\mu_8^*=0$	$\gamma_8^*=0$	$\pi_5^*=0$
$\mu_9^*=3$	$\gamma_9^*=0$	
$\mu_{10}^*=0$	$\gamma_{19}^*=0$	

b） 再計算価格

$\mu_1^*=6.423$	$\gamma_1^*=0$	$\rho_1^*=0.122$
$\mu_2^*=0$	$\gamma_2^*=3.846$	$\rho_2^*=2.038$
$\mu_3^*=4.038$	$\gamma_3^*=0$	
$\mu_4^*=10.192$	$\gamma_4^*=0$	
$\mu_5^*=0$	$\gamma_5^*=35.0$	
$\mu_6^*=0$	$\gamma_6^*=0.962$	
$\mu_7^*=0$	$\gamma_7^*=0$	
$\mu_8^*=0$	$\gamma_8^*=0.5$	
$\mu_9^*=3.692$	$\gamma_9^*=0$	
$\mu_{10}^*=0$	$\gamma_{10}^*=0$	

*　　*　　*

参 考 文 献

〔1〕 浅沼萬里，定額資本予算の最適配分問題，「経済論叢」96巻1号，昭和40年7月。

〔2〕 Bierman, Harold Jr., and Smidt, Seymour, *The Capital Budgeting Decision*, 1960.

〔3〕 Charnes, A., Cooper, W., W., and Miller, M. H., "Application of Linear Programming to Financial Budgeting and the Costing of Funds", *Journal of Business*, Vol. XXXII, No. 1, Jan. 1959.

〔4〕 Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, 1963.

〔5〕 Dorfman, R., Samuelson, P. A., and Solow, R. M. 〔Dosso と略記〕, *Linear Programming and Economic Analysis*, 1958.

〔6〕 Gale, David, *The Theory of Linear Economic Models*, 1960.

〔7〕 Gomory, R. E., and Baumol, W. J., "Integer Programming and Pricing", *Econometrica*, Vol. 28, No. 3, July 1960.

〔8〕 Kantorovich, L. V. "Further Development of Mathematical Methods and the Prospects of Their Application in Economic Planning", Nemchinov, V. S. (ed.), *The Use of Mathematics in Economics*, 1964. 邦訳, 数学的方法の発展と計画化や経済学における利用の展望, ネムチノフ編, 岡稔訳「マルクス経済学の数学的方法」(下), 昭和36年。

〔9〕 古瀬大六「生産の経済学」昭和40年。

〔10〕 Lorie, James H., and Savage, Leonard, "Three Problems in Rationing Capital", *Journal of Business*, Vol. XXVIII, No. 4, Oct. 1955.

〔11〕 Massé, Pierre, *Optimal Investment Decision*, 1962.

〔12〕 Massé, P. and Bessière, F., "Long-Term Programming of Electrical Investments", 1958, cited from Nelson, J. R. (ed.), *Marginal Cost Pricing in Practice*, 1964.

〔13〕 根岸隆・浜田宏一「計画理論入門」昭和37年。

〔14〕 Vajda, Steven, *Mathematical Programming*, 1961.

〔15〕 Weingartner, Martin Jr., *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*, 1963.